

***Squelettes Euclidiens d'Objets Discrets  $n$ -Dimensionnels***

Sara Fernández-Vidal et Grégoire Malandain

**N° 2771**

Janvier 1996

PROGRAMME 4

 ***apport  
de recherche***



## Squelettes Euclidiens d'Objets Discrets n-Dimensionnels

Sara Fernández-Vidal\* et Grégoire Malandain\*\*

Programme 4 — Robotique, image et vision  
Projet Epidaure

Rapport de recherche n° 2771 — Janvier 1996 — 32 pages

**Résumé :** Le squelette et la transformée en axe médian sont des outils nés du besoin de décrire de manière compacte les propriétés globales d'un objet, en particulier leur forme. Lors du calcul du squelette, il est nécessaire de conserver trois propriétés : *l'homotopie*, la *bonne localisation* du squelette, et la *reconstruction* de l'objet à partir du squelette. Nous avons fait une étude des approches existantes : assurer simultanément ces trois propriétés semble très difficile. De plus le problème principal de toutes les méthodes existantes est leur généralisation difficile au cas  $n$ -dimensionnel. Dans cet article, nous proposons un algorithme pour le calcul de l'axe médian d'objets  $n$ -dimensionnels. Nous utilisons pour cela la carte de distance euclidienne, ce qui nous assure l'invariance par rapport aux transformations isométriques. Les points du squelette sont d'abord caractérisés localement à l'aide de deux paramètres  $d$  et  $\phi$ , dont les valeurs correspondent au niveau de détail du squelette, et qui introduisent un espace de paramètres naturel pour le squelette. Ensuite, en fixant un seuil pour un des deux paramètres, on obtient le niveau de détail final du squelette. Finalement, l'étape appelée "reconstruction topologique" nous assure que le squelette a la même topologie que l'objet initial.

**Mots-clé :** Squelette, fonction de distance, représentation et interprétation des objets.

(Abstract: *pto*)

\* . svidal@sophia.inria.fr

\*\* . greg@sophia.inria.fr - INRIA, Project Epidaure - 2004 Route des Lucioles, BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex, France

# Digital Euclidean Skeleton in $n$ -D

**Abstract:** In this paper, an algorithm to construct the approximate medial axis of a  $n$ -dimensional object is proposed. The algorithm is based on euclidean distance mapping, which guarantees the invariance under isometric transformation of the results. Skeleton points are first locally characterized, which keeps a reasonable computational cost of the method. For that purpose, we define two parameters,  $\phi$  and  $d$ , whose value correspond to the detail level of the skeleton, and introduce a natural scale-space for the skeleton. Second, a threshold is chosen for one of these parameters, which gives the final detail level of the skeleton. Finally, a global step verify that the topology of the skeleton correspond to the one of the initial object.

**Key-words:** Skeletonization, distance transform, topological reconstruction

# 1 Etat de l'art

Le squelette et l'axe médian sont des outils nés du besoin de décrire les propriétés globales d'un objet, en particulier leur forme.

Les premiers efforts faits pour trouver une définition du squelette sont dûs à H. Blum [9]. Il se sert du concept de feu de prairie, c'est-à-dire d'un feu provenant des points du contour et qui se propage à vitesse constante dans l'objet. Le squelette est formé par les points où les fronts de ces feux s'intersectent. Ces points sont aussi appelés points d'extinction. Une autre définition, largement utilisée, est aussi introduite par H. Blum. On considère la surface obtenue à partir de la fonction de distance d'un objet, laquelle nous donne, pour chaque point de l'objet, la distance au point de contour le plus proche. Le squelette est défini comme le lieu des discontinuités de la dérivée de cette surface.

Toujours dans le but de formaliser la notion de squelette, L. Calabi [13, 14, 21] considère le problème d'un point de vue topologique et étudie les propriétés du squelette des objets qu'il considère comme étant des ensembles fermés dans le plan euclidien. Il donne une définition du squelette qui est basée sur le concept de boules maximales. Il démontre que les notions de point d'extinction et de centre de boule maximale sont équivalentes. Ainsi, on peut voir le squelette comme l'ensemble des centres des boules maximales de l'objet. Dans la même ligne, on trouve les travaux de G. Matheron et J. Serra [28, 36].

Le squelette est donc un sous-ensemble de l'objet, très fin (ou mince) et placé au "centre" de l'objet. Le squelette d'un objet bidimensionnel aura l'apparence d'un graphe composé de lignes courbes. La structure de ce graphe nous donne l'information sur la forme de l'objet. Si l'on attache à chaque point de ce graphe la valeur de la distance au point le plus proche du contour (le rayon de la boule maximale centrée en ce point) nous obtenons ce qui, dans la littérature, est nommé *axe médian*. Grâce à celui-ci, nous aurons aussi accès à l'information concernant le contour (frontière) de l'objet.

L'application de ces définitions dans le cas discret pose beaucoup de problèmes. Des efforts ont également été faits pour définir directement le squelette des objets digitaux [30], mais nous préférons considérer les objets comme étant des approximations d'objets continus.

Puisque le squelette est destiné à représenter l'objet, la transformée en axe médian ou, plus généralement, le processus de squelettisation doit satisfaire les conditions suivantes :

- **être homotopique** ([8], premier chapitre). Cela signifie qu'il faut que la topologie de l'objet soit préservée. Par exemple, si un objet est connexe, il faut que son squelette le soit aussi.
- **assurer la bonne localisation du squelette** afin d'obtenir, entre autres, l'invariance du squelette par rapport aux transformations isométriques. Il faut donc que la méthode s'ajuste aux définitions données par Blum et Calabi.
- **être réversible**. L'objet doit pouvoir être reconstruit à partir de son axe médian.

Nous pouvons classer toutes les méthodes proposées dans la littérature en quatre catégories :

- algorithmes d’amincissement,
- algorithmes qui calculent le squelette d’un objet à partir de sa carte de distance,
- algorithmes basés sur la simulation de la propagation de feu de prairie,
- algorithmes qui calculent le squelette à partir du diagramme de Voronoï de l’objet, ce type de méthode est aussi connue par le terme de méthode continue.

Nous donnons d’abord quelques remarques générales concernant toutes ces méthodes. Il faut remarquer que la plupart d’entre elles ne vérifient pas les trois propriétés que nous venons de citer. En outre le principal problème de toutes ces méthodes est leur généralisation difficile au cas  $n$ -dimensionnel. Signalons enfin l’un des principaux soucis soulevés par tous les auteurs : la sensibilité du squelette au moindre changement dans la frontière de l’objet. Une petite saillie ou bruit du contour ajoute une nouvelle branche (ou barbule [29]) au squelette. La plupart des algorithmes de squelettisation font usage de techniques de simplification ("*pruning techniques*" [37]) afin d’éliminer ce type de branches.

## 1.1 Algorithmes d’amincissement

Ce type d’approche cherche à amincir l’objet tout en gardant sa topologie initiale [41, 20, 23]. Ce sont des algorithmes itératifs (par balayage successif des images ou par technique de suivi de contours). Ils partent du contour initial de l’objet, étudient la connexité de chaque point du contour dans son voisinage et enlèvent ceux dont la suppression n’affecte pas la topologie de l’objet. Ainsi, l’amincissement de l’objet consiste à enlever successivement des couches ou "pelures".

Il y a aussi, dans le cadre de la morphologie mathématique, des algorithmes d’amincissement basés sur l’érosion successive du contour de l’objet.

En général, ces types d’algorithmes sont non invariants par rotation. Quant à la localisation obtenue, elle n’est pas correcte puisque ces méthodes ne suivent aucune des définitions données pour les points du squelette.

## 1.2 Squelette à partir de la carte de distance

L’utilisation de la carte de distance pour le calcul du squelette est une idée très répandue. Dans la figure 1 nous avons représenté la carte de distance d’un objet bidimensionnel, comme une surface d’élévation, où la hauteur pour chaque point de l’objet est égale à la distance de ce point au contour de l’objet.

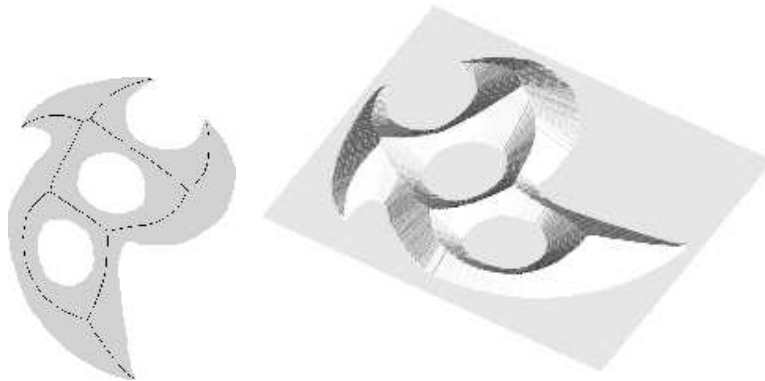


FIG. 1 – à droite un objet et son squelette, à gauche la carte de distance de l'objet.

Visuellement, la relation entre cette surface et le squelette de l'objet est très claire : la projection des arêtes de cette surface dans le plan donne une structure très similaire au squelette de l'objet. Beaucoup d'efforts ont été fait pour détecter ces arêtes dans les cartes de distance discrètes. La carte de distance la plus utilisée est celle de Danielson [16], qui, actuellement, est la plus proche de la fonction de distance euclidienne. D'autres métriques ont été utilisées, mais leur utilisation produit des squelettes très sensibles à la rotation, pas très précis (dans le sens euclidien) et avec nombreuses barbules [2, 17].

Nous pouvons considérer ici un type d'approche qui calcule le squelette en deux étapes, dont la première consiste à trouver un sous-ensemble initial du squelette, par exemple les maxima locaux de la carte de distance. Ce sous-ensemble est non connexe. Dans la deuxième étape on essaie de lui rendre connexe, on cherche des configurations de voisinage dans la carte de distance afin de retrouver des lignes de crête ou arêtes de cette surface, qui vont connecter l'ensemble des maxima locaux.

Gibbons, dans [34], définit certaines configurations de voisinage, "hump" (bosses), "valleys" (vallées), "saddle points", "climbing neighbour", qui permettent de parcourir les lignes de crête depuis un maximum local ou depuis un "saddle point".

Les auteurs de [38] présentent une méthode appelée "maximal tracking" qui consiste à trouver dans l'ensemble des maxima locaux deux types de points, les "base points" (points de contour dont la courbure est extrémale) et les "apex points" (maxima locaux dans un voisinage de taille  $3 \times 3$ ). En partant de ces points on parcourt les arêtes ("ridges", lignes de crête) de la carte de distance à l'aide des "directional uphill neighbours". Les points où ces trajectoires s'arrêtent sont marqués et repris par la suite comme points de départ des trajectoires trouvées à l'aide des "directional downhill neighbours".

Dans [31, 4, 3] on propose des techniques similaires, qui diffèrent dans la façon de calculer les maxima locaux de la fonction de distance, dans les configurations de voisinages utilisées pour caractériser les lignes de crête de la fonction de distance (arêtes ou "ridges"), ainsi que dans la façon de les parcourir.

En général, on peut dire que même si ces méthodes donnent des résultats plus proches du cas continu, elles sont difficilement généralisables au cas tridimensionnel, car le nombre de configurations possibles pour caractériser le squelette devient très grand.

On peut également citer les travaux de Chuang et al. [15]. Ils présentent une méthode analytique pour trouver le MAT des régions polygonales. Au lieu de calculer la carte de distance dans toute la région, ils définissent un champ de potentiel qui peut être calculé de façon isolée pour chaque point et qui dépend de la distance du point à tous les points de contour. Ce champ de potentiel est calculé de façon analytique à l'aide des équations des segments du contour. Les vallées de ce champ sont une approximation du MAT. À partir d'un point quelconque de l'objet, on descend dans la direction de la force, on atteint une vallée, et de là on peut atteindre les autres vallées et on extrait ainsi les branches et vertex du squelette. Cette méthode est difficilement généralisable en 3D.

### 1.3 Simulation de la propagation de feu de prairie

Un troisième type d'approche est la simulation de la propagation de feu de prairie à partir des contours vers l'intérieur de l'objet. On détecte les intersections (points d'extinction) des fronts de ces feux au fur et à mesure qu'ils se propagent (dans le domaine discret [1, 43, 42, 40], ou analytique [33]).

À l'aide d'une technique de suivi de contour, Xia [43] détermine le nouveau front. Chaque pixel du contour courant est considéré émetteur d'une onde secondaire (un disque, ou boule digitale, 4-disque), le nouveau front est l'enveloppe de toutes ces ondes. Pour chaque pixel, il marque les pixels voisins qui font partie de l'onde dont il est émetteur. Les pixels du nouveau front qui ont été marqués plus d'une fois sont des points d'extinction. Dans cette simulation il peut y avoir certaines anomalies. Par exemple, les fronts peuvent s'intersecter aux pixels qui ne sont pas points d'extinction ("artificial intersections"). L'auteur est obligé de traiter ces anomalies avec certains types de masques.

Une étude vraiment très intéressante, qui porte sur l'application de l'analogie de feu de prairie au calcul du squelette, est fait par Meyer dans [29]. Il s'y intéresse à la vitesse de propagation du feu le long du squelette. En utilisant ce concept, il donne une nouvelle définition du squelette et introduit aussi la  $\theta$ -bissectrice conditionnelle, un sous-ensemble du squelette où le feu se propage à une vitesse supérieure à  $\frac{1}{\sin \theta}$ . Suite à ces définitions, il propose des méthodes itératives, utilisant des outils de morphologie mathématique, pour le calcul de la bissectrice conditionnelle et du squelette.

L'algorithme proposé par Vincent [42] est un mélange des approches par amincissements successifs et des approches utilisant la carte de distance. Il est utilisé pour trouver les centres de boules maximales, qu'il appelle points d'ancrage. Ensuite, il fait des amincissement successifs par suivi de contour à l'aide de files d'attente. Selon la trame utilisée (hexagonale, carrée, etc), il crée des tableaux avec toutes les configurations de voisinage possibles, en différenciant celles qui sont homotopiques de celles qui ne le sont pas. Tous les pixels du contour sont mis dans la file d'attente, sauf ceux qui sont des points d'ancrage. Pour chaque pixel dans la file d'attente on examine son voisinage, et on ajoute dans la file d'attente ceux



qui sont à l'intérieur du contour courant. Ensuite, on regarde si la configuration de voisinage est homotopique. Si elle ne l'est pas, le pixel ne peut pas être enlevé de l'objet (à cet instant) et on le remet sur la file d'attente. Il se peut que par la suite la configuration de ce pixel change, et devienne homotopique.

Une variation de cette dernière méthode est proposée par Talbot [40], où les points d'ancrage (centres de boules maximales) sont calculés d'une façon plus précise, non pas via les maxima locaux de la carte de distance, mais en faisant usage de la définition de  $\theta$ -bissectrice conditionnelle, celle-ci étant calculée à l'aide de la carte de distance.

## 1.4 Squelette à partir du diagramme de Voronoï

Le point de départ de cette approche est donné par Kirkpatrick dans [22], où il postule que le squelette d'une forme polygonale est un sous-ensemble du diagramme de Voronoï de cette forme (diagramme de Voronoï d'un ensemble de segments, pas d'un ensemble de points). Cette idée est mise en oeuvre par Lee [25]. Il calcule d'abord le diagramme de Voronoï du polygone et ensuite il supprime les arêtes partant des sommets des parties concaves de ce polygone.

Mais l'utilisation de cette idée pour trouver les squelettes des objets ayant une forme arbitraire est fort difficile. D'une part, l'approximation polygonale d'une forme quelconque est un problème assez difficile, et d'autre part le calcul du diagramme de Voronoï est complexe (surtout lorsqu'il y a des trous dans l'objet), long, et produit un très grand nombre de barbules.

Récemment sont apparues des approches [35, 19, 6] qui calculent le squelette à partir du diagramme de Voronoï (DV) d'un ensemble de points, cet ensemble étant un échantillonnage discret du contour (continu) de l'objet. Les diagrammes de Voronoï, et les squelettes trouvés via ces approches convergent vers le cas idéal au fur et à mesure qu'on augmente la densité de l'échantillonnage. Donc, dans ces approches, le problème principal est de trouver un échantillonnage discret qui approxime au mieux la forme de l'objet, afin de que cette idée puisse être mise en pratique. Ces méthodes sont aussi désignées sous le terme de *méthodes continues* car elles utilisent des techniques propres à la géométrie algorithmique, ce qui permet de s'abstraire de la grille discrète.

Dans [12], Brandt propose une méthode pour trouver un bon échantillonnage du contour (il limite aussi l'ensemble des formes à traiter, "regular sets"). Il calcule le DV de cet ensemble, et conclut que le squelette de l'objet est la partie du DV qui est totalement à l'intérieur de l'objet. Sur le squelette ainsi trouvé, il propose une technique de "pruning" pour supprimer de nombreuses branches fictives. Dans [11], il donne des preuves de convergence et de continuité de son approche.

Ogniewicz et al. [35] agissent de la même façon. Ils appellent Voronoï Medial Axis le squelette calculé à partir du DV. Ils simplifient le squelette obtenu à l'aide de critères caractérisant la robustesse des branches du squelette dans l'objet.

Il y a aussi des travaux pour calculer le squelette, via Voronoï, des objets tridimensionnels [39, 10, 5]. Mais la suppression des branches du VD qui n'appartiennent pas au squelette devient encore plus difficile.

## 2 Méthode proposée

Nous allons présenter une nouvelle méthode qui calcule les squelettes des objets  $n$ -dimensionnels. Notre approche utilise la carte de distance euclidienne. Pour chaque pixel de l'objet on suppose qu'on connaît un vecteur qui pointe vers un des points de contour parmi ses plus proches. On peut trouver des algorithmes très efficaces qui font ces calculs [16], et qui sont facilement adaptables à n'importe quelle dimension. Nous proposons une caractérisation locale des points du squelette, basée sur l'analyse de ces vecteurs, sans aucune hypothèse sur la dimension de l'objet. Pour faire cela, nous avons défini deux paramètres,  $\phi$  et  $d$ , avec lesquels nous pouvons régler le niveau de détail du squelette.

Ce chapitre s'articule selon le schéma suivant : dans le paragraphe 2.1 on définira les outils de départ pour notre méthode; dans les paragraphes 2.2 et 2.3 nous allons détailler des problèmes qui se posent au moment d'appliquer les définitions de Calabi et Blum au cas discret; dans le paragraphe 2.4 l'approche que nous proposons sera exposée. D'abord nous définirons les paramètres qui vont nous servir à caractériser localement des points du squelette, et on discuterons les avantages et inconvénients de l'utilisation de chacun des paramètres. Dans le même paragraphe, on examinera les propriétés que le squelette d'un objet doit satisfaire. Parmi elles, la connexité prendra une place assez importante.

### 2.1 Carte de distances

Soit  $X$  l'objet dont nous voulons extraire le squelette. Dans un espace discret  $n$ -dimensionnel,  $X$  est défini comme un sous-ensemble fini de  $\mathbb{Z}^n$ . Le complémentaire de  $X$  (le fond de l'image) est noté  $\overline{X}$ .

La carte de distance de  $X$ ,  $\rho$ , est définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ M &\longmapsto \rho(M) = d(M, \overline{X}) = \inf_{P \in \overline{X}} d(M, P) \end{aligned} \quad (1)$$

où  $d$  est une fonction de distance quelconque, classiquement la distance euclidienne.

La *projection* du point  $M$  en  $\overline{X}$  est le sous-ensemble de  $\overline{X}$  défini par

$$M \longmapsto \Pi(M) = \{P \in \overline{X} / d(M, P) = \rho(M)\} \quad (2)$$

Étant donné un point  $M$  de l'objet, nous pouvons trouver un des points de sa projection,  $P$ , à l'aide de l'algorithme de Danielsson [16], lequel nous donne, pour le point  $M$ , le vecteur  $\overrightarrow{MP}$ .

## 2.2 Centres des boules maximales

La première caractérisation du squelette de  $X$  se base sur le concept de boules maximales de  $X$ , le squelette,  $SK(X)$ , étant l'ensemble de leurs centres.

Une boule  $B_r(M)$  est définie par son rayon  $r \in \mathbb{R}^+$  et son centre  $M$ . On dit qu'une boule  $B_r(M)$  de  $X$  est maximale si et seulement si :

$$B_r(M) \subset X \text{ et} \\ \nexists (r', M') \neq (r, M) \text{ tel que } B_{r'}(M') \subset X \text{ et } B_r(M) \subset B_{r'}(M')$$

Calabi prouve que, si  $\text{card}(\Pi(M)) \geq 2$ , alors le point  $M$  est le centre d'une boule maximale.

L'algorithme de Danielsson nous donne déjà un point  $P$  de la projection de  $M$ . Nous pouvons retrouver les points qui manquent de  $\Pi(M)$  avec l'heuristique suivante : nous cherchons dans le voisinage de  $M$ , les points  $M'$  tels que  $\|\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'P'}\| = \|\overrightarrow{MP}\|$ , où  $\overrightarrow{M'P'}$  est le résultat de l'algorithme de Danielsson pour le point  $M'$ .

```

    Pour tout  $M \in X$ 
       $\Pi(M) = \{P\}$ ,  $\overrightarrow{MP}$  fourni par l'algorithme de Danielsson
      Pour tout  $M'$  du voisinagea de  $M$ 
        Si  $\|\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'P'}\| = \rho(M) = \|\overrightarrow{MP}\|$ 
           $\Pi(M) = \Pi(M) \cup \{P'\}$ 
        fin
      fin
  
```

---

<sup>a</sup> un voisinage  $3^n$ .

S'il y a un point  $P' \neq P$  tel que  $\|\overrightarrow{MP'}\| = \|\overrightarrow{MP}\|$ , alors  $\text{card}(\Pi(M)) \geq 2$  et  $M$  est le centre d'une boule maximale de  $X$ . Cette méthode est assez efficace pour trouver les centres des boules maximales de  $X$ , mais ne donne pas de bons résultats (voir figure 6). Nous trouvons des squelettes non connexes, car on ne peut pas détecter les centres des boules maximales qui ne sont pas placés au milieu d'un pixel (ou voxel).

## 2.3 Maxima locaux de la carte de distance

Les inconvénients de la dernière méthode, dûs à la discrétisation de l'espace, peuvent être partiellement évités avec une autre définition du squelette, celle-ci étant aussi le lieu des discontinuités de la dérivée de la carte de distance  $\rho$ .

Ces discontinuités sont les maxima locaux de la carte de distance dans la direction de son gradient,  $\nabla \rho$ . Soit  $\mathbf{u}$  un vecteur unitaire défini par  $\mathbf{u} = \frac{\nabla \rho(M)}{\|\nabla \rho(M)\|}$ , lorsque  $\nabla \rho(M) \neq \vec{0}$ . Le point  $M$  est un maximum local de  $\rho$  si et seulement si une des deux conditions suivantes se vérifie :

$$- \rho(M) > \rho(M + \mathbf{u}) \text{ et } \rho(M) \geq \rho(M - \mathbf{u})$$

- $\rho(M) \geq \rho(M + \mathbf{u})$  et  $\rho(M) > \rho(M - \mathbf{u})$

Si on fait le développement de Taylor de  $\rho(M - \mathbf{u})$  au premier ordre :

$$\rho(M - \mathbf{u}) \approx \rho(M) - \mathbf{u} \cdot \nabla \rho(M) = \rho(M) - \|\nabla \rho(M)\|$$

on peut voir que la deuxième partie des deux conditions précédentes se vérifie toujours et que finalement que  $M$  soit un maximum local revient à dire que :

$$\rho(M) \geq \rho(M + \mathbf{u}) \quad (3)$$

Pour la mise en oeuvre, nous simplifions cette expression avec les observations suivantes:

- Nous pouvons approximer le vecteur  $\mathbf{u}$  par  $-(\overrightarrow{MP}/\|\overrightarrow{MP}\|)$ ,  $\overrightarrow{MP}$  étant le résultat de l'algorithme de Danielsson. On sait que  $\rho(M) = \|\overrightarrow{MP}\|$  et que le vecteur  $-\overrightarrow{MP}$  est l'approximation au premier ordre de  $\nabla \|\overrightarrow{MP}\|^2$  (là où  $\rho(M)$  est différentiable). Puisque  $\nabla \|\overrightarrow{MP}\|^2 = \|\overrightarrow{MP}\| \nabla \rho(M)$ , nous pouvons approximer la direction de  $\nabla \rho(M)$  par  $-\overrightarrow{MP}$ .
- Au lieu de calculer  $\rho(M + \mathbf{u})$  par interpolation, nous l'approximons par  $\rho(M')$ ,  $M'$  étant le point le plus proche à  $M + \mathbf{u}$  dans la trame discrète utilisée.

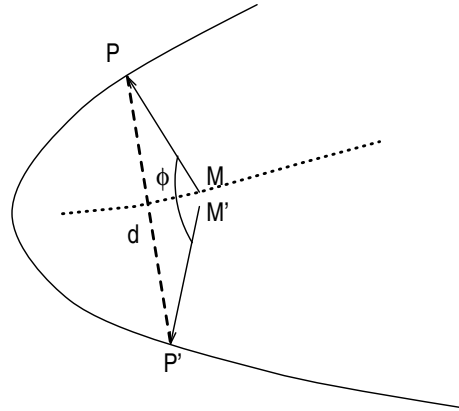
Cette caractérisation du squelette est suffisante pour des objets simples, mais elle ne donne pas de bons résultats, en ce qui concerne la connexité, pour des objets plus compliqués (voir figures 7, 8).

Remarquons que cette caractérisation a un rapport direct avec celles données par Matheron [28] ou Meyer [32]: ils introduisent les notions de *upstream* et *downstream* d'un point de l'objet, qui correspondent respectivement aux directions  $\nabla \rho$  et  $-\nabla \rho$ . La caractérisation finale des points du squelette, donnée par Meyer dans [32], est pratiquement la même que celle de l'équation (3), et produit les mêmes résultats expérimentaux.

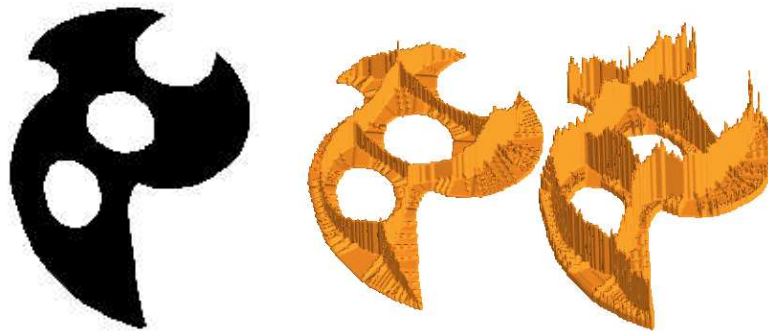
## 2.4 Espace de paramètres pour la squelettisation

Nous allons proposer dans cette section une nouvelle caractérisation des maxima locaux de la carte de distance, c'est-à-dire une meilleure caractérisation des discontinuités de la dérivée de la carte de distance.

Comme nous l'avons vu auparavant, nous pouvons approximer le gradient de la carte de distance au point  $M$ ,  $\nabla \rho(M)$  par le vecteur  $-\overrightarrow{MP}$ ,  $\overrightarrow{MP}$  étant le résultat de l'algorithme de Danielsson pour le point  $M$ . Une discontinuité de  $\nabla \rho$  au point  $M$  apparaît lorsque le point  $M$  a un voisin  $M'$  dont la projection  $P'$  (que nous pouvons obtenir via Danielsson) est très *différente* de la projection  $P$ , de  $M$ . Cette *différence* peut être mesurée par un des deux paramètres suivants (voir figure 2):  $\phi = \widehat{(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{M'P'})}$ , et  $d = \|\overrightarrow{PP'}\|$ .

FIG. 2 – paramètres  $\phi$  et  $d(P, P')$ .

La figure 3 montre que l'utilisation de ces deux paramètres pour caractériser le degré d'appartenance d'un point au squelette, est une idée très intuitive. Pour l'objet à gauche de cette figure, nous avons représenté en  $z$  la valeur de  $d$  (surface à gauche de la même figure) et de  $\phi$  (surface à droite) respectivement. Ces paramètres introduisent une sorte d'espace-échelle naturel pour le squelette.

FIG. 3 – De gauche à droite: l'objet initial, l'espace de paramètre  $d$  et l'espace de paramètre  $\phi$ .

Si nous donnons un seuil pour un de ces deux paramètres, nous pouvons trouver le squelette d'un objet facilement (voir figures 9 et 10). Avec un petit seuil nous obtenons un squelette très détaillé, très dépendant du bruit du contour, mais ayant en général la même topologie que celle de l'objet initial. Dans la partie haute de l'espace de paramètre on obtient des squelettes non sensibles au "bruit" de contour, de plus en plus compacts, et malheureusement ayant souvent une topologie différente de celle de l'objet initial. Pour faire le seuillage on agit de la façon suivante :

- Pour chaque pixel  $M$ , appartenant à l'objet initial, on cherche dans son voisinage, le pixel  $M'$  qui rend maximal la valeur du paramètre choisi.

- Si cette valeur est plus grande que le seuil:
  - Si la boule  $B_{\rho(M')}(M')$  est incluse dans la boule  $B_{\rho(M)}(M)$  on ne garde que  $M$  dans l'ensemble final.
  - Si la boule  $B_{\rho(M)}(M)$  est incluse dans la boule  $B_{\rho(M')}(M')$  on ne garde que  $M'$  dans l'ensemble final.
  - Si aucune des deux conditions précédentes ne se vérifie on garde  $M$  et  $M'$  dans l'ensemble final.

Ce type de caractérisation n'est pas nouveau. On a trouvé deux caractérisations très proches de la nôtre. Toutes les deux utilisent le concept de feu de prairie. Par exemple, Meyer dans [29] définit la vitesse de propagation d'un front de feu comme  $\frac{1}{\sin\theta}$  (voir figure 4) et il classe les points de l'objet selon cette vitesse : aux points d'extinction (squelette) les fronts des feux se propagent à une vitesse supérieure à 1. Aux points qui n'appartiennent pas au squelette la vitesse de propagation est égale à 1. Finalement il s'intéresse à certains sous-ensembles du squelette. Il appelle  $\theta$ -bissectrice conditionnelle au sous-ensemble du squelette où la vitesse de propagation est supérieure ou égale à  $\frac{1}{\sin\theta}$ . En regardant les figures 2 et 4 on réalise facilement, que les angles  $\phi$  et  $\theta$  sont liés par l'équation

$$\pi = 2\theta + \phi. \quad (4)$$

La vitesse de propagation étant égal à  $\frac{1}{\sin\theta}$ , les points du squelette vérifient  $\theta < \pi$ . Ce qui est équivalent, pour notre cas, à  $\phi > 0$ . Nous pouvons voir (figure 9) que dans le cas digital ce seuil produit beaucoup de branches parasites ou barbules. L'auteur de [24] utilise l'analogie de feu de prairie afin de définir le  $\alpha$ -squelette, où l'angle  $\alpha$  est l'angle qui forment deux fronts de feu qui s'intersectent en un point donné. C'est angle  $\alpha$  n'est autre que  $2\theta$ .

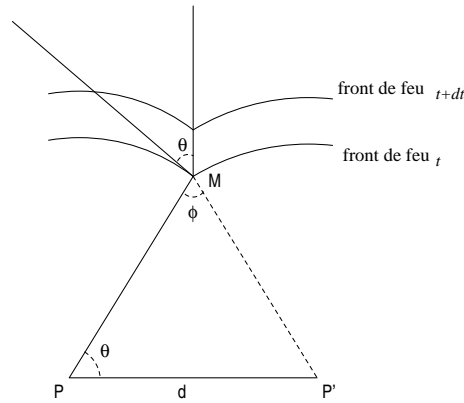


FIG. 4 – illustration de la caractérisation de Meyer.

## 2.5 Reconstruction de l'objet à partir de son squelette

On appelle **Transformée en axe médian** (MAT), la paire  $\{SK(X), \rho_{sk}\}$ , où  $SK(X)$  désigne le squelette de  $X$ , et  $\rho_{sk}$  est la restriction de  $\rho_X$  dans  $SK(X)$ .

De ce point de vue, la squelettisation est une transformation grâce à laquelle on obtient la paire  $\{SK(X), \rho_{sk}\}$ . Dans notre méthode, pour obtenir cette paire, il suffit de garder, pour chaque pixel,  $M$ , caractérisé comme appartenant à  $SK(X)$ , la norme du vecteur  $\overrightarrow{MP}$  (fourni par l'algorithme de Danielsson),  $P$  appartenant à la projection de  $M$ ,  $\Pi(M)$ .

La reconstruction de l'ensemble initial  $X$  est alors simple, puisque l'objet est l'union des boules  $B_{\rho(M)}(M)$ , pour tout  $M$  appartenant à  $SK(X)$ . Dans la figure 12, on peut observer la reconstitution de l'objet de la figure 3 à partir du squelette trouvé avec différents seuils pour  $d$ . Dans la figure 11, nous présentons la reconstitution du même l'objet à partir du squelette trouvé avec différents seuils pour  $\phi$ . Nous pouvons reconstruire l'objet initial avec des valeurs élevées du seuil pour le paramètre  $\phi$ , ce qui n'est pas le cas pour le paramètre  $d$ .

## 2.6 Une première caractérisation : comment éviter la sensibilité du squelette au bruit du contour

Dans le paragraphe 2.4, nous avons montré que le seuillage dans l'espace de paramètres nous permet d'obtenir le squelette d'un objet. Mais nous avons vu aussi que le choix du seuil est assez problématique et que rien n'assure que le squelette trouvé aura les propriétés souhaitées.

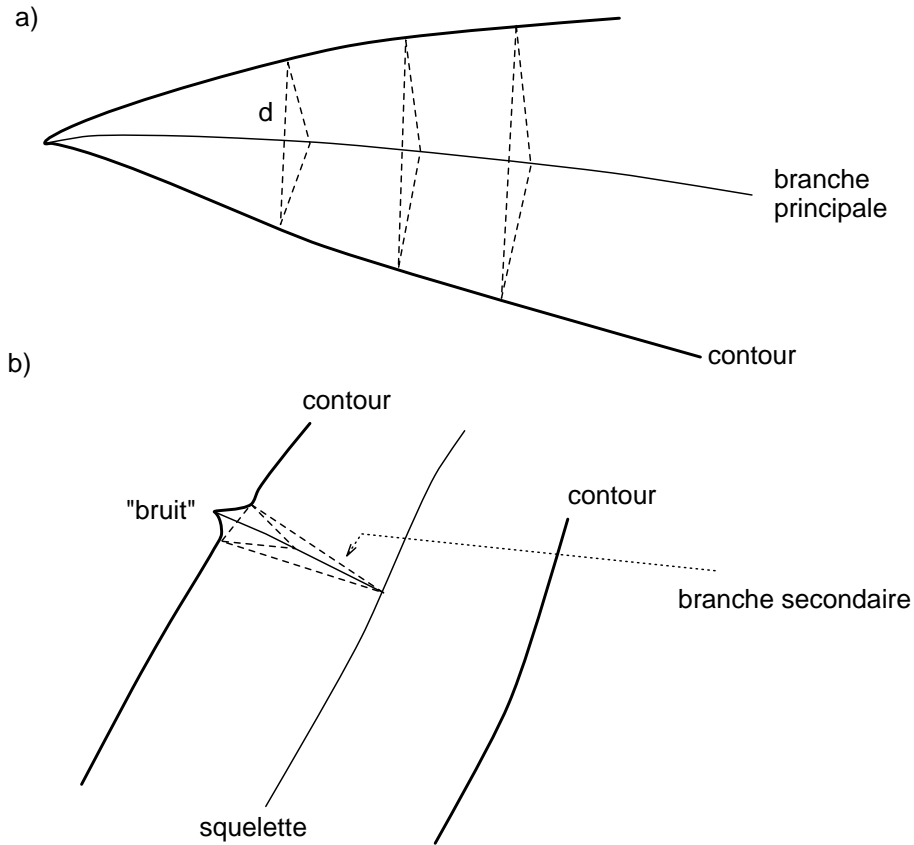


FIG. 5 – Différentes types de branches du squelette.

Une des caractéristiques du squelette est d'être très sensible au moindre changement dans le contour de l'objet (voir [29]). Dans la version discrète des objets, cette propriété devient assez problématique. Chaque petit saillie ou bruit du contour produit une nouvelle branche dans le squelette. Ce problème peut être traité avant, pendant ou après le calcul du squelette.

- On peut toujours faire un pré-traitement sur l'objet. Cela pourrait consister à lisser le contour de l'objet afin d'éliminer les saillies provenant du bruit et également les détails peu intéressants de la forme de l'objet. Il faudrait pour cela estimer la bonne échelle pour lisser la forme, avec un approche de type multi-échelle (voir les travaux de T. Lindeberg [26]).
- La deuxième alternative est de traiter le problème pendant le calcul du squelette de l'objet. Nous proposons dans cette section une heuristique à cette fin.
- La plupart des approches de squelettisation existantes traitent ce problème après avoir fait le calcul du squelette. Il s'agit alors d'éliminer les branches du squelette qui proviennent du bruit. De nombreuses techniques de "*prunning*" sont proposées dans la bibliographie (voir introduction). Une autre idée serait de calculer l'espace de para-



mètres de  $\phi$  (ou  $d$ ), prendre le squelette à un seuil très bas et garder les parties de ce squelette qui apparaissent dans un large intervalle de valeurs de  $\phi$  (ou  $d$ ).

Nous allons faire la distinction entre deux types de branches dans le squelette (voir figure 5). On appelle **branches secondaires** du squelette les branches produites par une petite saillie ou bruit du contour (figure 5,b), ce sont des branches non pertinentes. Ce qui reste du squelette est ce qu'on appelle *partie principale* du squelette, laquelle est composée par les points du squelette qui sont dans la partie centrale de l'objet et par les branches qui viennent des saillies très significatives du contour, et que nous appelons **branches principales** (figure 5, a).

Plus le seuil choisi est petit, plus le squelette est détaillé, avec toutes sortes de branches.

Au fur et à mesure que le seuil augmente, les branches du squelette disparaissent. Les *branches secondaires* vont disparaître très vite par rapport à la *partie principale* du squelette qui est plus robuste face au changement des paramètres.

De ces remarques, nous avons déduit que la caractérisation des points du squelette peut dépendre de  $\|\overrightarrow{MP}\|$  : plus le point est à l'intérieur de l'objet, moins les saillies ont un effet sur lui. Nous formulons cette caractérisation par :

$$d(P, P') \geq f(\|\overrightarrow{MP}\|) \quad (5)$$

Nous pouvons poser la fonction  $f$  égale à l'identité :

$$d(P, P') \geq \|\overrightarrow{MP}\|, \quad (6)$$

cette condition se vérifie dans le cas de *branches principales* (voir figure 5,a) et revient à dire qu'on prend un seuil pour  $\phi$  de 60 degrés. Avec cette heuristique, on obtient des résultats expérimentaux assez bons, mais dans quelques cas, non connexes (voir figure 13, objet à droite). Si nous nous intéressons seulement à une reconstruction future de l'objet, ces résultats contiennent l'information suffisante. Mais si nous voulons utiliser ces résultats comme représentations de la forme des objets, il faut préserver leur topologie : si l'objet est connexe, il faut que son squelette le soit aussi.

## 2.7 Conservation de la topologie : connexité du squelette

Nous tenons à préserver cette dernière caractéristique. Dans cette section, on regarde comment préserver ou récupérer la topologie de l'objet dans son squelette.

### Contraintes fonctionnelles pour préserver la topologie

Dans un premier temps, nous avons réfléchi aux propriétés que l'on pouvait donner à la fonction  $f$  de la caractérisation 5 pour que la connexité soit préservée (voir [18]) :

- Les saillies du contour ont moins d'effet à l'intérieur de l'objet, donc  $f$  doit être moins restrictive lorsque  $\|\overrightarrow{MP}\|$  est grand.

- Nous savons aussi que  $f(\|\overrightarrow{MP}\|) \leq 2\|\overrightarrow{MP}\|$ , grâce à l'inégalité triangulaire.  $f(\|\overrightarrow{MP}\|) = 2\|\overrightarrow{MP}\|$  est équivalent à prendre  $\phi$  égal à 180 degrés, ce qui est la restriction la plus forte qu'on peut appliquer aux points du squelette. Donc, comme les saillies sont dans le contour de l'objet, nous pouvons choisir une fonction  $f$  telle que  $f'(0) \approx 2$ .

Par exemple, avec la caractérisation suivante :

$$d(P, P') \geq \frac{\|\overrightarrow{MP}\|}{0.04\|\overrightarrow{MP}\| + 0.55} \quad (7)$$

nous trouvons des résultats expérimentaux très bons (voir figure 14). Mais la conservation de la topologie de l'objet n'est pas toujours assurée.

### Reconstruction topologique du squelette

Nous avons voulu profiter au maximum de l'information contenue dans l'espace-échelle (espace de paramètres) et non plus seulement de celle obtenue à une échelle fixée. Ainsi, nous avons décidé d'utiliser deux seuils : un seuil haut va fixer le niveau de détail souhaité pour le squelette, et correspondra peut-être à un squelette non connexe, et un seuil bas qui va fournir la topologie de l'objet.

Nous appelons  $SK_{min}$  le squelette trouvé avec le seuil bas, et nous supposons qu'il a la même topologie que l'objet initial. Le squelette trouvé avec le seuil haut s'appelle  $SK_{max}$ . Comme  $SK_{max} \subset SK_{min}$ , nous pouvons extraire de  $SK_{min}$  les morceaux manquant de  $SK_{max}$ , pour donner à  $SK_{max}$  la même topologie que celle de  $SK_{min}$ .

L'application de la transformée de Hough généralisée, afin de retrouver les parties manquantes de  $SK_{max}$ , peut être une voie intéressante à explorer. Nous sommes resté dans le domaine de la topologie discrète, où nous disposons de tous les outils nécessaires pour effectuer une reconstruction topologique.

Cette reconstruction topologique de  $SK_{max}$  par rapport à  $SK_{min}$  consiste à éliminer itérativement les éléments de  $SK_{min}$  non nécessaires (ceux qui ne changent pas la topologie de  $SK_{min}$ ). Lorsqu'on ne peut plus rien supprimer, on incorpore à  $SK_{max}$  les parties qui sont encore présentes. Précisément, les étapes de cette reconstruction sont les suivantes :

1. On amincit  $SK_{min}$ . Le squelette trouvé par seuillage peut avoir une épaisseur égale à 2 dans certains endroits. Pour l'étiquetage qui est fait à l'étape suivante, il faut l'amincir pour obtenir un squelette d'épaisseur 1. La méthode d'amincissement utilisée (détaillée dans [7]) est basée sur la détection et la suppression des points simples (points dont l'élimination ne change pas la topologie de l'objet). Le squelette ainsi obtenu est appelé  $TSK_{min}$ .
2. On fait une caractérisation topologique des points de  $TSK_{min}$ , (voir [27]), après laquelle chaque point de  $TSK_{min} \setminus SK_{max}$  prend une des étiquettes suivantes :
  - Point jonction (entre courbe(s) ou/et surface(s))

- Point frontière. Il y en a de deux sortes : point frontière simple, et point de contact (voisin de  $SK_{max}$ ).
- Point ordinaire : point appartenant à une surface ou courbe simple.

Ainsi,  $TSK_{min}$  sera composé de quatre types de composantes connexes, formées exclusivement par l'une des quatre classes de points que l'on vient de citer. Ces quatre types de composantes connexes sont : a) *les jonctions*, b) *les frontières*, c) *les contacts* et d) *les surfaces ou courbes simples*.

3. On procède à l'élimination des composantes connexes non nécessaires. Toutes les surfaces ou courbes simples (composantes connexes de type (d)) qui ont une seule frontière (type (b)) sont des éléments non nécessaires. Donc, dans cette étape on supprime toutes les composantes ordinaires qui vérifient cette propriété ainsi que les frontières associées.
4. On itère à partir de l'étape 2 jusqu'au moment où on ne peut plus rien éliminer.

Dans la figure 15, on montre un exemple de la reconstruction topologique. À gauche sont présentés plusieurs exemples, dont les parties en noir (aussi marquées avec un astérisque) sont des parties de  $SK_{max}$ , le reste appartient à  $SK_{min}$  dont les frontières sont étiquetées en bleu, les jonctions en orange, les points ordinaires en vert et les contacts en rouge. À droite de la même figure, nous présentons les résultats de la reconstruction topologique.

### 3 Résultats

On présente des résultats trouvés pour des images synthétiques et réelles. Dans les figures 16, 17 et 18 on montre des résultats pour trois objets synthétiques bidimensionnels. À gauche de chaque figure on présente le squelette obtenu avec un seuil assez large, et à droite le squelette connexe obtenu après l'étape de reconstruction topologique.

Dans la figure 19, on montre une vertèbre et son squelette. L'image originale a été obtenue par un scanner X-ray CT et contient  $256 \times 256 \times 50$  voxels (chaque voxel est de taille  $0.5 \times 0.5 \times 1 \text{ mm}^3$ ) dont l'intensité est codée sur 256 valeurs discrètes. Les représentations 3D de la vertèbre originale et de son squelette sont montrées en haut et en bas de cette figure respectivement.

Dans la figure 20, on peut voir le squelette d'un crâne. L'image du crâne original a été obtenue par un scanner X-ray CT et contient environ  $220 \times 128 \times 161$  voxels (chaque voxel est de taille  $1 \times 1 \times 0.8 \text{ mm}^3$ ) dont l'intensité est codée sur 256 valeurs discrètes. La représentation 3D du crâne original est montré à gauche de la figure et celle de son squelette, obtenu par seuillage et reconstruction topologique, est montrée à droite de la figure 20.

### 4 Conclusion

Nous avons présenté dans cet article une nouvelle approche de squelettisation basée sur l'utilisation de la carte de distance euclidienne, sans aucune hypothèse sur la dimension de

l'objet dont on cherche le squelette. Cette caractéristique garantit l'invariance des résultats par transformation isométrique, ce qui s'avérera très utile pour une étape ultérieure de mise en correspondance. L'algorithme est basé sur la définition de deux paramètres qui introduisent un espace-échelle naturel pour le squelette.

Pour préserver la topologie et la robustesse du squelette, nous utilisons deux seuils, le premier pour préserver la topologie, le second pour fixer le niveau de détail (et ainsi éviter que le squelette soit sensible aux petits bruits dans le contour).

Le squelette résultant permet une reconstruction complète de l'objet et sa topologie initiale est conservée, ceci grâce à l'étape de reconstruction topologique.

## **Remerciements**

Ce travail a été effectué dans le cadre du programme HCM de la Communauté Économique Européenne.

## Références

- [1] C. Arcelli, I.P. Cordella, and S. Levialdi. From local maxima to connected skeletons. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, PAMI*, 3(2):134–142, March 1981.
- [2] C. Arcelli and G. Sanniti Di Baja. A width-independent fast thinning algorithm. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 7:463–474, July 1985.
- [3] Carlo Arcelli and Grabiella Sanniti di Baja. *Ridge points in Euclidean distance maps*, volume 13, pages 237–243. April 1992.
- [4] Carlo Arcelli and Grabiella Sanniti di Baja. Euclidean skeleton via centre-of-maximal-disc extraction. *Image and Vision Computing*, 11(3):163–173, April 1993.
- [5] D. Attali. *Squelettes et Graphes de Voronoï 2D et 3D*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, October 1995.
- [6] D. Attali, P. Bertolino, and A. Montanvert. Using polyballs to approximate shapes and skeletons. In *International Conference on Pattern Recognition*, Jerusalem, Israël, October 1994.
- [7] G. Bertrand and G. Malandain. A new characterization of three-dimensional simple points. *Pattern Recognition Letters*, 15(2):169–175, February 1994.
- [8] S. Beucher. *Segmentation d'Images et Morphologie mathématique*. PhD thesis, École des Mines, Juin 1990.
- [9] H Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. *Symposium on Models for the Perception of Speech and Visual Form*, November 1964.
- [10] Jonathan W. Brandt. Describing a solid with the three-dimensional skeleton. *SPIE, Curves and Surfaces in Computer Vision and Graphics III*, 1830:258–269, 1992.
- [11] Jonathan W. Brandt. Convergence and continuity criteria for discrete approximations of the continuous planar skeleton. *CGVIP: Image Understanding*, 59(1):116–124, 1994.
- [12] Jonathan W. Brandt and V. Ralph Algazi. Continuous skeleton computation by voronoi diagram. *CGVIP: Image Understanding*, 3(3):329–338, 1992.
- [13] L. Calabi. A study of the skeleton of plane figures. Technical Report 60429,sr-2, Parke Mathematical Laboratories, December 1965.
- [14] L. Calabi and W.E. Hartnett. Shape recognition, prairie fires, convex deficiencies and skeletons. *Am. Math. Monthly*, 75:335–342, 1968.

- [15] Jen-Hui Chuang and Narendra Ahuja. Skeletonization using a generalized potential field model. *AICV*, pages 223–237, 1991.
- [16] P.E. Danielsson. Euclidean distance mapping. *Computer Graphics and Image Processing*, 14:227–248, 1980.
- [17] Leo Dorst. Pseudo-euclidean skeletons. In *Eighth International Conference on Pattern Recognition, Paris*, pages 286–288. IEEE Computer Society Press, 1986.
- [18] S. Fernández-Vidal and G. Malandain. Digital euclidean skeleton in  $n$ -d. In *To Appear in 9th SCIA, Sweden*, 1995.
- [19] John A. Goldak, Xinhua Yu, Alan Knight, and Lingxian Dong. Constructing discrete medial axis of 3-d objects. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 1(3):327–339, 1991.
- [20] W.X. Gong and G. Bertrand. A simple parallel 3d thinning algorithm. In *10th International Conference on Pattern Recognition*, Atlantic City, June 17–21 1990.
- [21] W.E. Hartnett. Plane figures: Their skeletons and quench functions. Technical Report 60429,sr-3, Parke Mathematical Laboratories, October 1965.
- [22] D.G. Kirkpatrick. Efficient computation of continuous skeletons. *IEEE 20th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 18–27, 1979.
- [23] T.Y. Kong and A. Rosenfeld. Digital topology: introduction and survey. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 48:357–393, 1989.
- [24] B. Kruse. An exact sequential euclidean distance algorithm with application to skeletonizing. In *7th SCIA, Sweden*, pages 982–992, 1991.
- [25] D. Lee. Medial axis transformation of a planar shape. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 4:363–369, 1982.
- [26] T. Lindeberg. Detecting salient blob-like image structures and their scales with a scale-space primal sketch: A method for focus-of-attention. *International Journal of Computer Vision*, 11:283–318, 1993.
- [27] G. Malandain. *Filtrage, topologie et mise en correspondance d’images médicales multidimensionnelles*. PhD thesis, École Centrale de Paris, September 1992.
- [28] G. Matheron. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, volume 2, chapter 11 & 12, pages 217–256. Jean Serra, 1988. Academic Press.
- [29] F. Meyer. *Cytologie quantitative et morphologie Mathématique*. PhD thesis, École des Mines, May 1979.

- [30] F. Meyer. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, volume 2, chapter Skeletons in Digital Spaces, pages 257–296. Jean Serra, 1988. Academic Press.
- [31] F. Meyer. Skeletons and perceptual graphs. *Signal Processing*, 16:335–363, 1989.
- [32] F. Meyer. Digital euclidean skeletons. In *Visual Communication and Image Processing*, volume 1360, pages 251–262. SPIE, October 1990.
- [33] U. Montanari. Continuous skeletons from digitized images. *JACM*, 16(4):534–549, 1969.
- [34] C. Wayne Niblack, Phillip B. Gibbons, and David W. Capson. Generating skeletons and centerlines from the distance transform. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 54(5):420–437, September 1992.
- [35] R. Ogniewicz and M. Ilg. Voronoi skeletons: Theory and applications. In *Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 63–69. IEEE Computer Society Press, 1992.
- [36] J. Serra. Skeleton decompositions. *SPIE, Image Algebra and Morphological Image Processing III*, 1769:376–386, 1992.
- [37] D. Shaked and A. M. Bruckstein. Pruning medial axes. Technical report, Center for Intelligent Systems. Technion, IIT, 32000 Haifa, Israel, 1995.
- [38] Frank Y. Shih and Christopher C. Pu. A maxima-tracking method for skeletonization from euclidean distance function. In *IEEE Int. Conf. on Tools for AI*, volume 4, pages 246–253, 1991.
- [39] G. Székely, Ch. Brechbuhler, R. Ogniewicz, and T. Budinger. Mapping the human cerebral cortex using medial manifolds. 1808:130–144, 1992.
- [40] H. Talbot and L. Vincent. Euclidean skeletons and conditional bisectors. *SPIE Visual Communications and Image Processing*, 1818:862–876, 92.
- [41] Y.F. Tsao and K.S. Fu. A parallel thinning algorithm for 3d pictures. *Computer Graphics and Image Processing*, 17:315–331, 1981.
- [42] L. Vincent. *Algorithmes morphologiques à base de files d'attente et de lacets. Extension aux graphes*. PhD thesis, Ecole nationale supérieure des mines de Paris, 1990.
- [43] I. Xia. Skeletonization via the realisation of the fire front's propagation and extinction in digital binary shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(10):1076–1086, 1989.

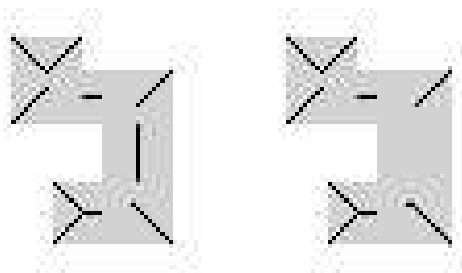


FIG. 6 – Centres des boules maximales. Taille des images:  $64 \times 64$ . L'épaisseur de la barre verticale dans l'objet de gauche est impaire, et paire dans l'objet de droite.

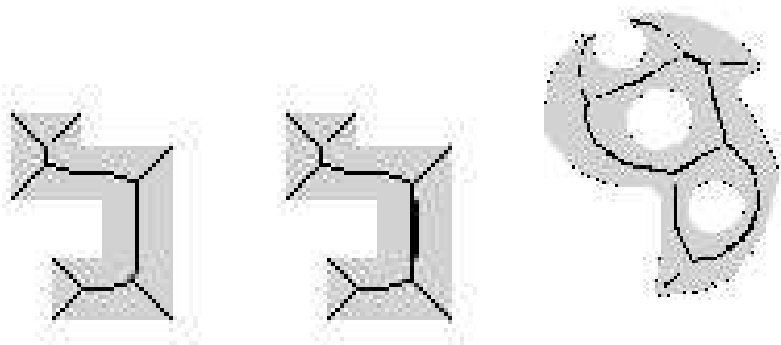


FIG. 7 – Maxima locaux de la carte de distance: les centres des boules maximales sont superposés en noir. La topologie du squelette peut être différente de celle de l'objet.

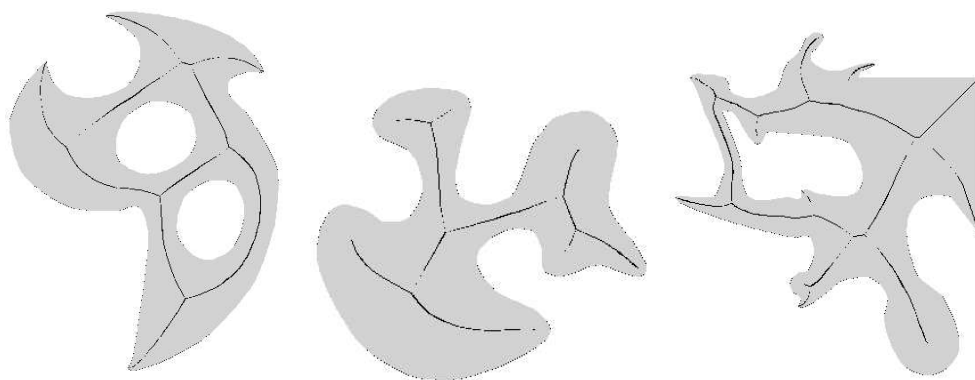


FIG. 8 – Maxima locaux de la carte de distance.



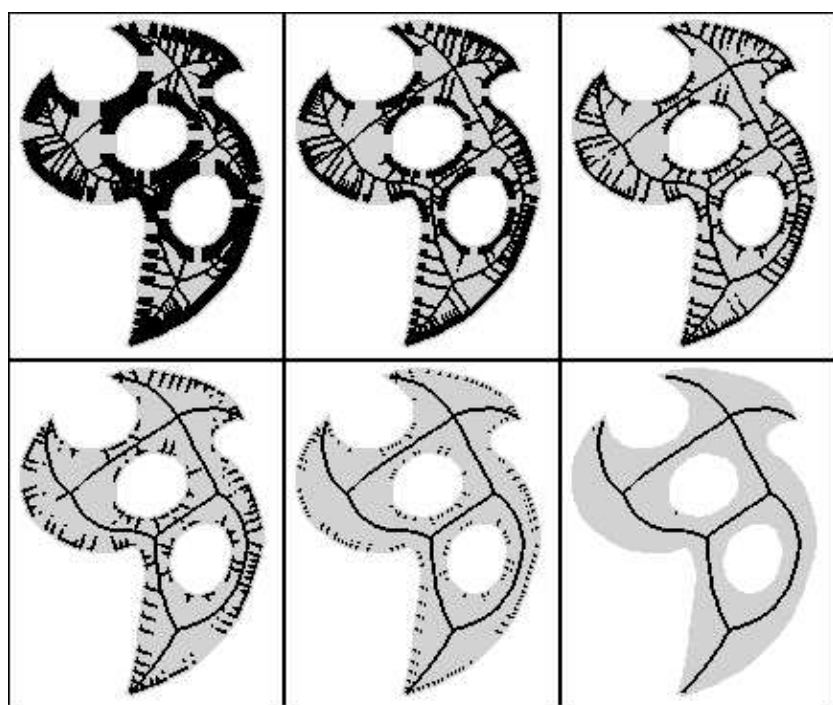


FIG. 9 – De haut en bas, et de gauche à droite:  $\phi_m$  est mis respectivement à 6, 10, 17, 25, 35 et 60 degrés.

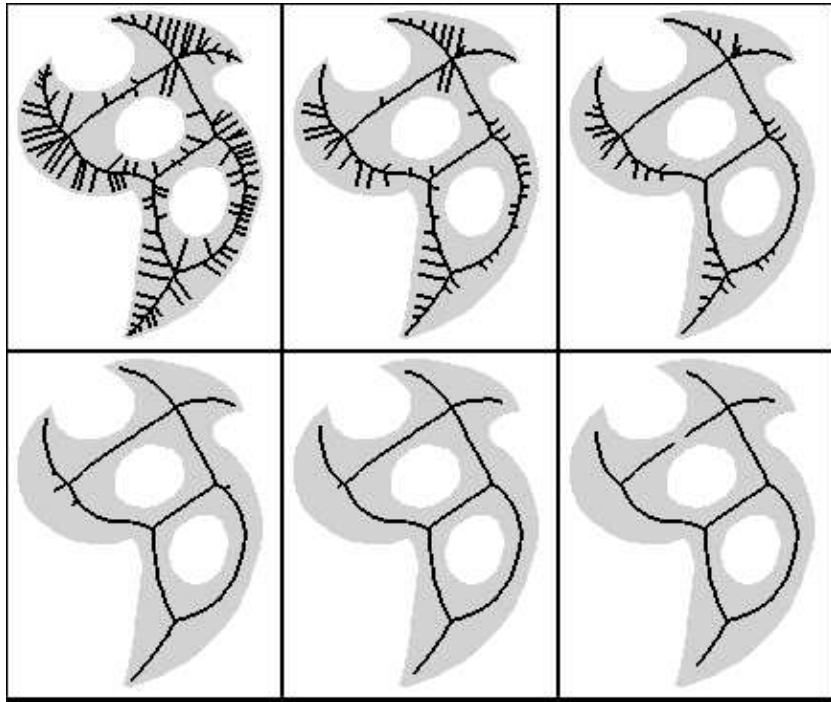


FIG. 10 – les points du squelette sont caractérisés par  $d(P, P') \geq d_m$ . De haut en bas, et de gauche à droite:  $d_m$  est mis respectivement à 2.5, 4, 5, 7, 11 and 14 pixels.

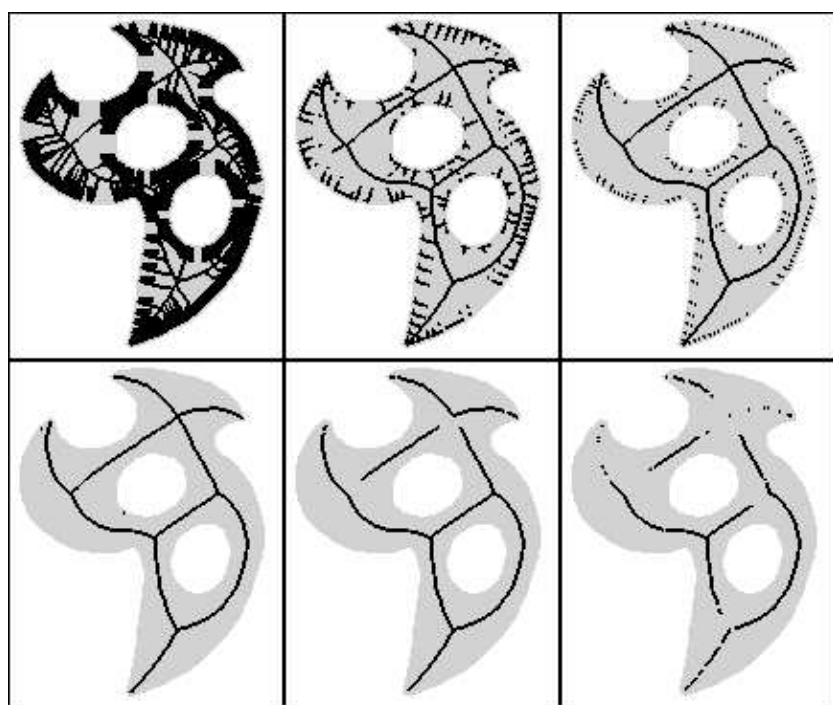


FIG. 11 – *Reconstruction, de haut en bas, et de gauche à droite:  $\phi$  est mis respectivement à 6, 25, 35, 60, 90 et 120 degrés.*

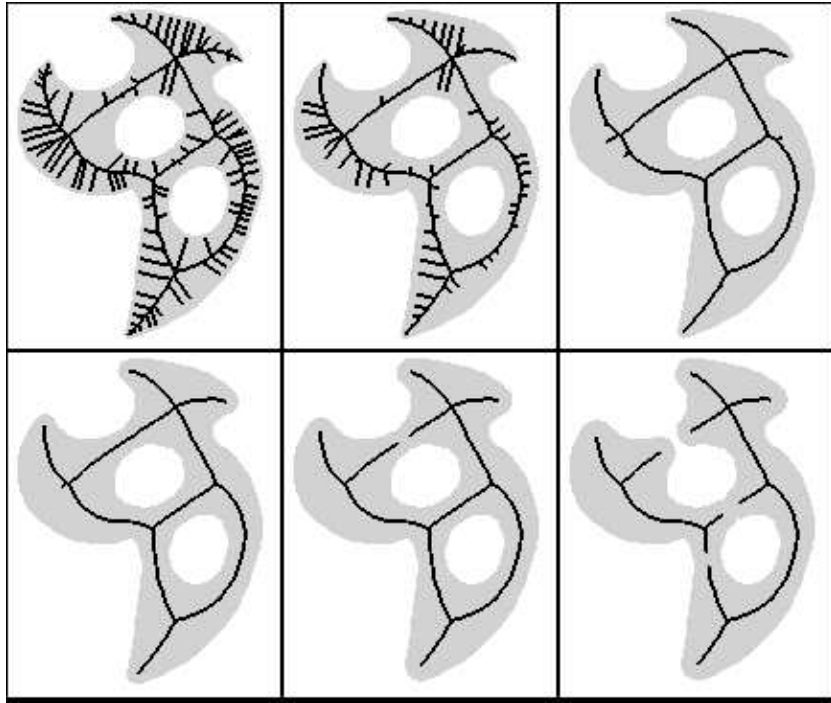


FIG. 12 – *Reconstruction, de haut en bas, et de gauche à droite: le paramètre  $d$  est mis respectivement à 2.5, 4, 7, 11, 14 et 16 pixels.*

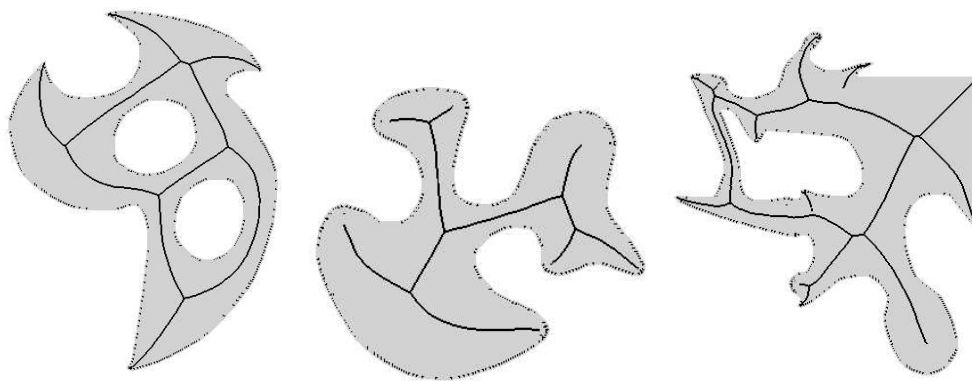


FIG. 13 – *squelettes trouvés avec la condition:  $d(P, P') \geq \|\overrightarrow{MP}\|$ .*

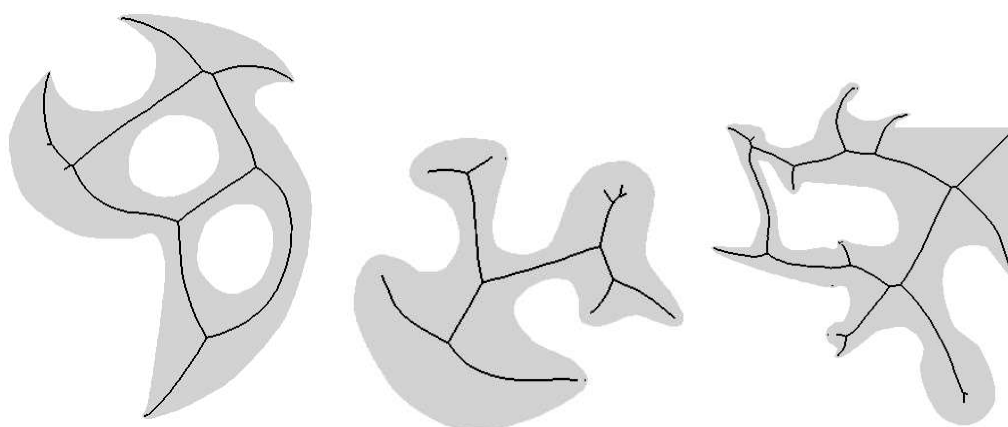


FIG. 14 – squelettes trouvés avec la condition 7.

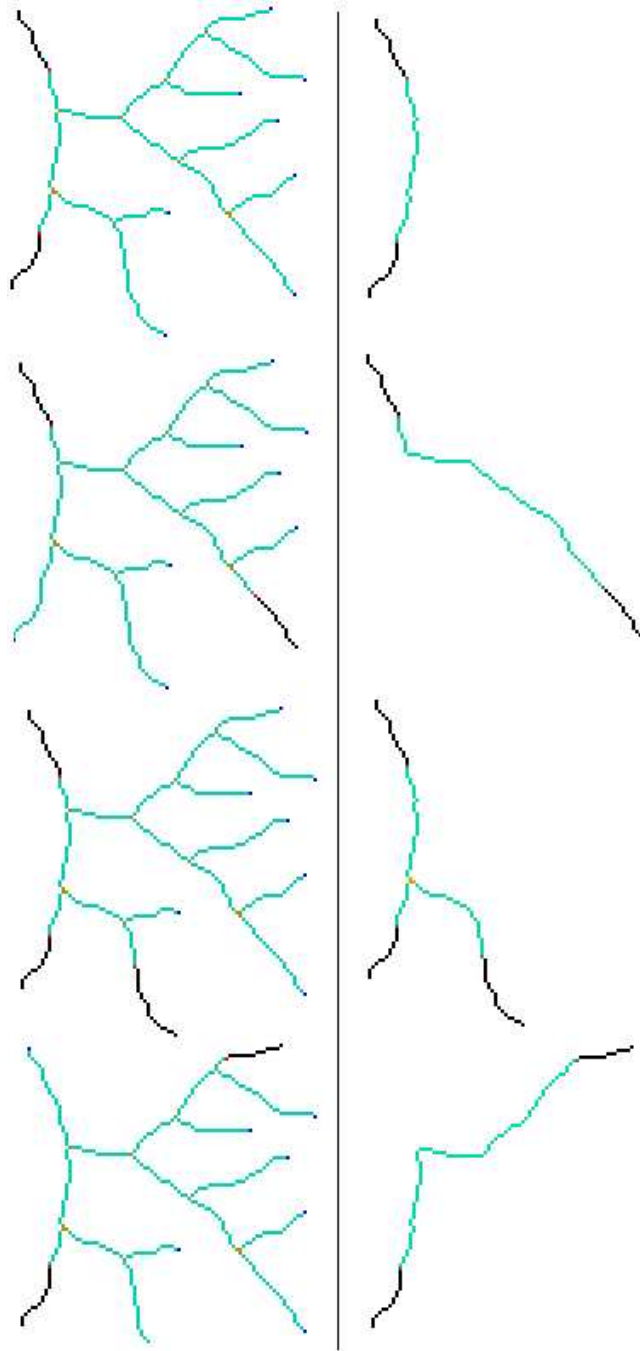


FIG. 15 – À gauche caractérisation topologique, à droite résultat de la reconstruction topologique. À gauche, les parties en noir appartiennent à  $SK_{max}$ , les autres parties appartiennent à  $SK_{min}$

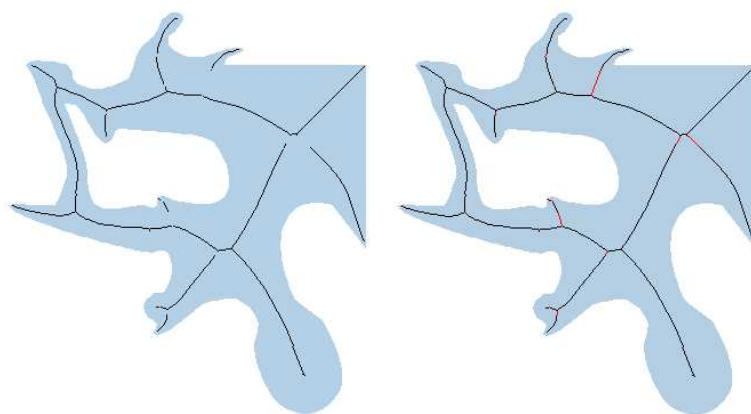


FIG. 16 – À gauche, le squelette trouvé avec un seuil de  $\phi = 89$  degrés. À droite la reconstruction topologique.

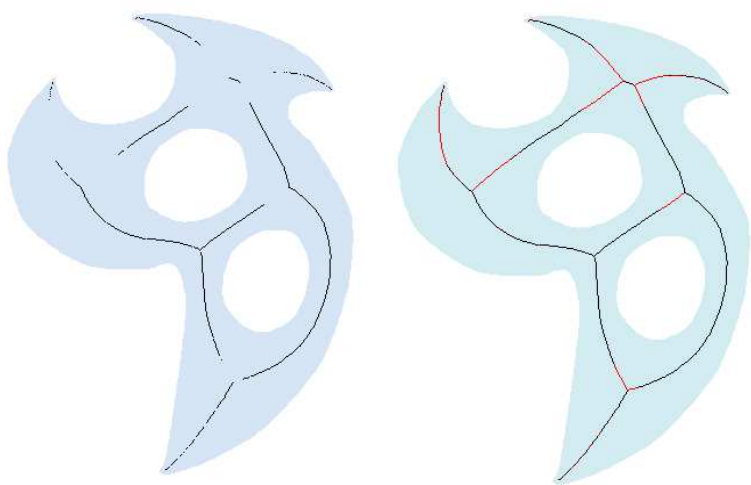


FIG. 17 – À gauche, le squelette trouvé avec un seuil de  $\phi = 125$  degrés. À droite la reconstruction topologique.

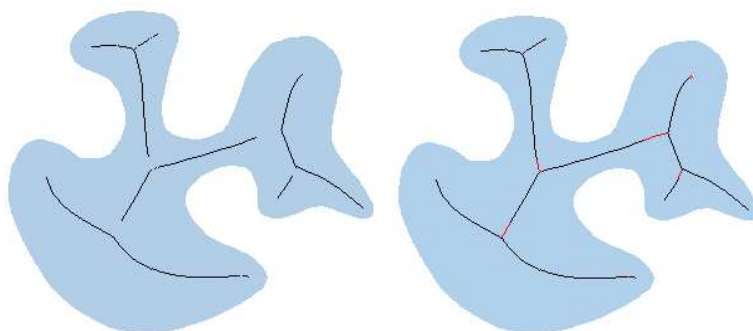


FIG. 18 – À gauche, le squelette trouvé avec un seuil de  $\phi = 95$  degrés. À droite la reconstruction topologique.



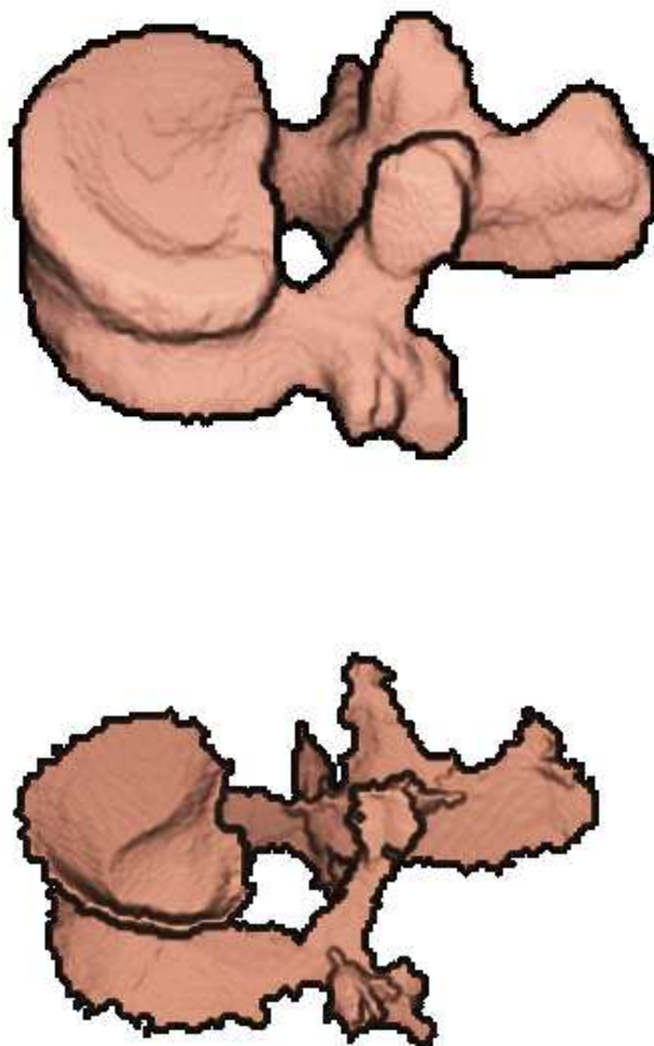


FIG. 19 – *Squelette d'une vertèbre après reconstruction topologique. Nous remercions le Professeur J.L. Coatrieux (Rennes Hospital, France) de nous avoir fourni cette image.*

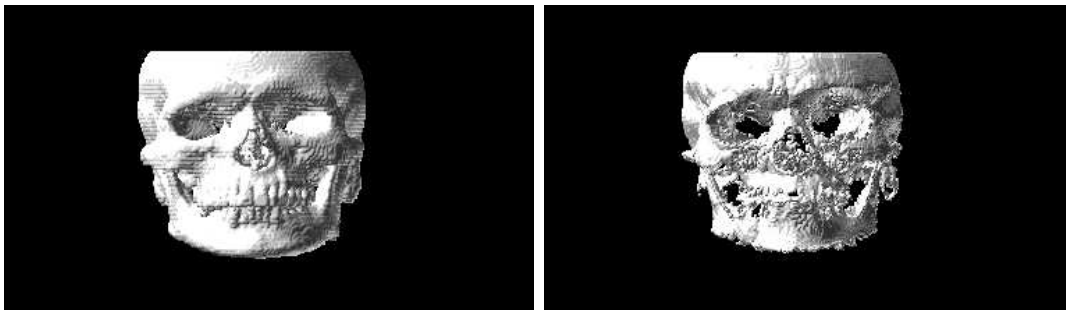


FIG. 20 – *Squelette d'une crâne après reconstruction topologique. Nous remercions GE-MS (Buc, France) de nous avoir fourni cette image.*



---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur

INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

ISSN 0249-6399